

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2022-2023 уч.год
9 класс
Решения и ответы

1. Найдите отношение $\frac{2023ac}{b^2}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в 2022 раза больше другого. Здесь $a \cdot b \cdot c \neq 0$.

Решение. Пусть $x_1 = 2022x_2$. Тогда по теореме Виета
 $x_1 + x_2 = 2023x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = 2022x_2^2 = \frac{c}{a}$.
Тогда

$$\begin{aligned}x_2 &= -\frac{b}{2023a} \\ \frac{c}{a} &= \frac{2022b^2}{2023^2 \cdot a^2} \\ ac &= \frac{2022b^2}{2023^2} \\ 2023ac &= \frac{2022b^2}{2023} \\ \frac{2023ac}{b^2} &= \frac{2022b^2}{2023b^2} = \frac{2022}{2023}\end{aligned}$$

Ответ. $\frac{2022}{2023}$

2. Найдите все решения уравнения

$$m^2 - 2mn - 3n^2 = 5$$

где m, n – целые числа.

Решение.

Преобразуем левую часть уравнения

$$\begin{aligned}m^2 - 2mn + n^2 - 4n^2 &= 5 \\ (m - n)^2 - (2n)^2 &= 5 \\ (m - n - 2n)(m - n + 2n) &= 5 \\ (m - 3n)(m + n) &= 5\end{aligned}$$

Целое число 5 можно разложить на множители четырьмя способами: $5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$. Получаем четыре системы уравнений, которые нужно решить в целых числах. Решаем, вычитая из второго уравнения первое.

$$\begin{aligned}\begin{cases} m - 3n = 1, \\ m + n = 5, \end{cases} & \quad \begin{cases} 4n = 4, \\ m + n = 5, \end{cases} & \quad \begin{cases} m = 4, \\ n = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m - 3n = 5, \\ m + n = 1, \end{cases} & \quad \begin{cases} 4n = -4, \\ m + n = 1, \end{cases} & \quad \begin{cases} m = 2, \\ n = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} m - 3n = -1, \\ m + n = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} 4n = -4, \\ m + n = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} m = -4, \\ n = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - 3n = -5, \\ m + n = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} 4n = 4, \\ m + n = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} m = -2, \\ n = 1 \end{cases}$$

Ответ. $m = 4, n = 1$; $m = -4, n = -1$; $m = 2, n = -1$; $m = -2, n = 1$.

3. Докажите неравенство при всех положительных a, b

$$\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^4} \leq \frac{1}{ab}$$

Решение. Применяя формулу квадрата разности, получаем

$$(a^2 - b)^2 \geq 0, \quad (a - b^2)^2 \geq 0$$

$$a^4 + b^2 \geq 2a^2b, \quad a^2 + b^4 \geq 2ab^2$$

Слагаемые в левой части неравенства можно сравнить с $\frac{1}{2ab}$

$$\frac{a}{a^4 + b^2} \leq \frac{a}{2a^2b} = \frac{1}{2ab}, \quad \frac{b}{a^2 + b^4} \leq \frac{b}{2ab^2} = \frac{1}{2ab}$$

Складываем и получаем нужное неравенство

$$\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^4} \leq \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} = \frac{1}{ab}$$

4. После футбольного матча Андрей сказал, что он забил 3 гола, а Паша забил только 1. Паша сказал, что забил 4 гола, а Ваня забил 5 голов. Ваня сказал, что он забил 6 голов, а Андрей только 2. Могло ли оказаться, что втроем они забили 10 голов, если известно, что каждый из них сказал один раз правду, а другой раз солгал?

Решение. Первый способ. Возможны два случая.

1) Если Андрей сказал правду про себя, то он забил 3 гола. Тогда Ваня про Андрея солгал, а про себя Ваня сказал правду, то есть он действительно забил 6 голов. Следовательно, Паша солгал про Ваню и сказал правду про себя, то есть он забил 4 гола. В этом случае мальчики забили в сумме $3 + 6 + 4 = 13$ голов.

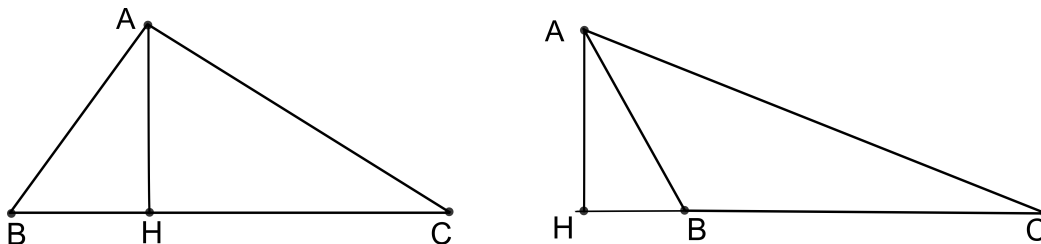
2) Если Андрей про себя солгал, то он сказал правду про Пашу, то есть Паша забил 1 гол. Тогда Паша также солгал про себя и сказал правду про Ваню, значит, Ваня забил 5 голов. Следовательно, Ваня про себя солгал и сказал правду про Андрея, что тот забил 2 гола. В этом случае мальчики забили в сумме $1 + 5 + 2 = 8$ голов.

Второй способ. Всего было высказано шесть утверждений, из которых ровно три — истинные. Про каждого из мальчиков было сделано по два различных утверждения, из которых одно должно быть истинным, а другое — ложным. Следовательно, Андрей забил либо 3 гола, либо 2, Паша — 1 или 4 гола, а Ваня — 5 или 6 голов. Заметим, что сумма 10 при таких вариантах может получиться единственным образом: если Андрей забил 3 гола, Паша — 1, а Ваня — 6. Однако, высказывание «Андрей забил 3 гола, а Паша — один», было сделано одним и тем же мальчиком, значит, такая ситуация невозможна.

Ответ. Не могло.

5. В треугольнике ABC $AC > AB$. Из вершины A опущена высота AH . Какая разность больше, $(AC - AB)$ или $(HC - HB)$?

Решение. Необходимо рассмотреть два случая, см. рис.



1й случай. Точка H лежит внутри отрезка BC . По теореме Пифагора

$$AB^2 - BH^2 = AH^2 = AC^2 - CH^2$$

Перейдем к разности квадратов и к сравнению отрезков.

$$CH^2 - BH^2 = AC^2 - AB^2$$

$$(CH - BH)(CH + BH) = (AC - AB)(AC + AB)$$

$$(CH - BH) \cdot BC = (AC - AB)(AC + AB)$$

По неравенству треугольника $AC + AB > BC$. Так как произведения равны, и второй множитель в правом произведении больше второго множителя в левом произведении, то $CH - BH > AC - AB$.

2й случай. Точка H лежит вне отрезка BC или совпадает с точкой B . По теореме Пифагора

$$AB^2 - BH^2 = AH^2 = AC^2 - CH^2$$

Из этого уравнения и условия $AC > AB$ следует, что B лежит между H и C , т.е. $CH > BH$. (В частности, $BH = 0$, H совпадает с точкой B). Значит, $CH - BH = BC$, и требуется сравнить $AC - AB$ и BC . По неравенству треугольника, $BC + AB > AC$, поэтому $BC > AC - AB$.

Получили, что в обоих случаях $CH - BH > AC - AB$.

Ответ. $CH - BH > AC - AB$.